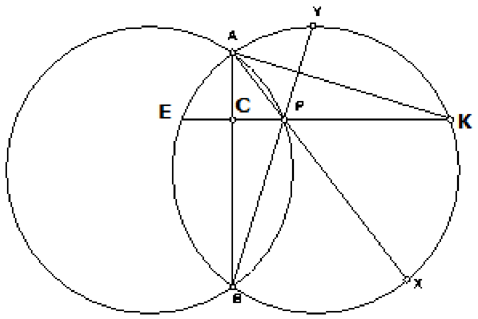
№1

Условие

Две равные окружности пересекаются в точках A и B. P – отличная от A и B точка одной из окружностей, X, Y – вторые точки пересечения прямых PA , PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB, делит одну из дуг XY пополам.

Решение



Используем следующую теорему:

«Величина угла, образованного секущими, пересекающимися вне круга, равна половине разности величин дуг, заключённых между сторонами этого угла».

Доказательство этой теоремы под номером три на http://www.resolventa.ru/spr/planimetry/cangle.htm

Рассмотрим в качестве таких секущих стороны, образующие угол $\angle KPX$

Дуги, заключённые между его сторонами – это дуги AE и KX.

Очевидно, что $\smile AE = \smile AP$, так как $PE \perp AB \Longrightarrow$

$$\angle KPX = \frac{1}{2}(\smile AP + \smile KX) \qquad (1)$$

Аналогично получаем, что

$$\angle KPY = \frac{1}{2}(\smile BP + \smile KY) \qquad (2)$$

При этом важно понимать, что разность дуг AP и BP равна удвоенной разнице углов PBA и PAB (т.к. это вписанные углы, опирающиеся на эти дуги).

$$\angle CPB = \angle KPY, \angle CPA = \angle KPX, \text{так как это вертикальные углы. Применим это:}$$

$$\angle CPB = 90 - \angle PBA, \angle CPA = 90 - \angle PAB \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \angle PBA - \angle PAB = \angle CPA - \angle CPB = \angle KPX - \angle KPY$$

Следовательно, $\smile AP - \smile BP = 2 \cdot (\angle KPX - \angle KPY)$, *или*

$$\frac{1}{2}(\smile AP - \smile BP) = \angle KPX - \angle KPY \qquad (3)$$

Если подставить (3) в выражения (1) и (2), получаем, что дуги KX и KY равны, что и требовалось доказать.