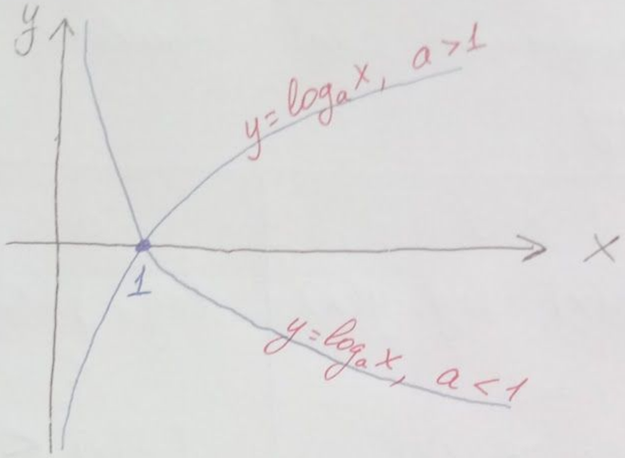
Решение логарифмических неравенств

Из графика логарифма видно, что логарифм — **монотонная** функция.



При $a > 1$ $y = \log_a x$ возрастает

При $a < 1$ $y = \log_a x$ убывает.

Так как $\log_a 1 = 0$, то график функции $\log_a x$ пройдёт через точку $(1;0)$.

График $y = \log_a (x+5)$ пройдёт через точку $(-4;0)$.

— / —

При решении логарифмических неравенств благодаря свойству монотонности мы можем перейти к системе неравенств относительно функций под знаком логарифма:

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$$

$$\log_a x > \log_a y,\ a > 1 \Rightarrow x > y$$

$$\log_a x > \log_a y,\ a < 1 \Rightarrow x < y$$

Необходимо учитывать ОДЗ. Под знаком логарифма не может быть отрицательного или нулевого значения, поэтому:

$a > 1$	$a < 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$
$<=>$	$<=>$
$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$
знак не меняется	знак неравенства меняется

С нулём мы сравниваем ту функцию, которая меньше (смотрим на знак неравенства).

Пример

$$\log_2(2-x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\sqrt{2}} 3$$

Используем свойства логарифма:

$$\log_2(2-x) - \log_2(x-1) > 2\log_2 3$$

$$\log_2(2-x) > \log_2 9 + \log_2(x-1)$$ ← сумма логарифмов - это логарифм произведения

$$\log_2(2-x) > \log_2 9(x-1)$$

Переходим к системе

дальше решите самостоятельно → $\begin{cases} 2-x > 9(x-1) \\ x-1 > 0 \end{cases}$ ← знак неравенства сохранился, т.к. основание больше 0

Решение логарифмических неравенств с переменным основанием

К предыдущей схеме решения просто добавится проверка, превосходит ли основание единицу или нет. Соответственно, будет два случая:

$$\log_{6-x}(18+3x-x^2) \leq 1$$

Разложим на множители:

$$\log_{6-x}((6-x)(x+3)) \leq 1$$

$$\underbrace{\log_{6-x}(6-x)}_{1} + \log_{6-x}(x+3) \leq 1$$

ОДЗ
$x+3>0$,
или $x>-3$

$$\log_{6-x}(x+3) \leq 0$$

1

$6-x \in (0;1)$

$0<6-x<1$

$5<x<6$

Тогда знак нер-ва меняется, т.к. основание <1:

$$\begin{cases} x+3 \geq 1 \\ 5<x<6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ 5<x<6 \end{cases}$$

I $5<x<6$ уд. ОДЗ

2

$6-x>1$

$x<5$

Знак нер-ва не меняется:

$$\begin{cases} x+3 \leq 1 \\ x<5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x<5 \end{cases}$$

С учётом ОДЗ:

II $x \in (-3;-2]$

Общий ответ:

$x \in (-3;-2] \cup (5;6)$

Домашнее задание №15
на 16 февраля 2018 г

1) $\lg(x^2-6) > \lg(8+5x)$

2) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x-6) \geq \log_{0,5}(x+4)$

3) $\log_{7-2x}(x+6) \leq 0$

4) $\dfrac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2} \leq 1$

5) $\log_3 x + 2\log_{\sqrt{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} x \leq 6$

6) $x\log_8\left(\frac{x}{5}-1\right) \geq 3\log_2\left(\frac{x}{5}-1\right)$