Решение заданий № 15 (С3)

1) $\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0$

Приводим к одному основанию:

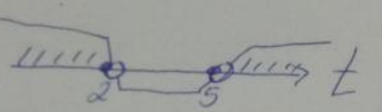
$$\log_2^2(4+3x-x^2)-7\log_2(4+3x-x^2)+10>0$$

Делаем замену:

$\log_2(4+3x-x^2)=t$

$t^2-7t+10>0$

$t_{1,2}=\frac{7\pm3}{2}=\left[\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right.$



$t\in(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$

ОДЗ

$4+3x-x^2>0$

$x_{1,2}=\left[\begin{matrix}4\\-1\end{matrix}\right.$

$\boxed{x\in(-1;4)}$

Возвращаемся к исходной переменной, разбивая на 2 случая:

1) $t>5$

$\log_2(4+3x-x^2)>5$

$4+3x-x^2>32$

$-x^2+3x-28=0$

$D=9-112<0$

корней нет

2) $t<2$

$\log_2(4+3x-x^2)<2$

$4+3x-x^2<4$

$-x^2+3x<0$

$x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$

Объединяя с ОДЗ, получаем $\boxed{\text{Ответ: } x\in(-1;0)\cup(3;4)}$

(2) $\dfrac{1}{5^x+31} \leq \dfrac{4}{5^{x+1}-1}$

ОДЗ
$x+1 \neq 0$
$x \neq -1$

$\dfrac{1}{5^x+31} \leq \dfrac{4}{5 \cdot 5^x - 1}$

2 случая в зависимости от знака выражения $5 \cdot 5^x - 1$:

(1) $\begin{cases} x > -1 \\ 5 \cdot 5^x - 1 \leq 4(5^x+31) \end{cases}$

$\begin{cases} x > -1 \\ 5 \cdot 5^x - 1 - 4 \cdot 5^x - 124 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -1 \\ 5^x \leq 125 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -1 \\ x \leq 3 \end{cases}$ $x \in (-1; 3]$

(2) Очевидно, что при $x < -1$ мы получим аналогичным способом неравенство $x \geq 3$. Неравенства несовместны, во втором случае решений нет.

Ответ: $x \in (-1; 3]$

③ $\log_{9x} 27 \le \frac{1}{\log_3 x}$

Распишем ОДЗ и перейдём к основанию 3:

$$\frac{\log_3 27}{\log_3 9x} \le \frac{1}{\log_3 x}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x \ne \frac{1}{9} \\ x \ne 1 \end{cases}$$

$$\frac{3}{\log_3 9x} \le \frac{1}{\log_3 x}$$

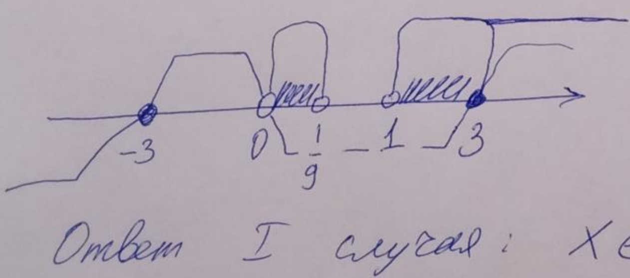
I $\begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (1; +\infty) \\ 3\log_3 x \le \log_3 9x \end{cases}$ ← доп. задание: а что будет при $x \in \left(\frac{1}{9}; 1\right)$?

$$\begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (1; +\infty) \\ \log_3 x^3 \le \log_3 9x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (1; +\infty) \\ x^3 > 0 \\ x^3 \le 9x \end{cases}$$

$x^3>0$ включено в первое неравенство системы

$$\begin{cases} x \in \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (1; +\infty) \\ x(x+3)(x-3) \le 0 \end{cases}$$



Ответ I случая: $x \in \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (1; 3]$

II случай несовместен. Докажите это. Как вы думаете, почему?

Домашнее задание № 16
на 24 февраля 2018

1. $\log_x 512 \le \log_2 \frac{64}{x}$

2. $\dfrac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0$

3. $\dfrac{2\sqrt{x+3}}{x+1} \le \dfrac{3\sqrt{x+3}}{x+2}$

4*. $(4x^2 - 16x + 16)^{\log_8 \sqrt{2x}} > (4-2x)^{\sqrt{\log_2 x}}$ $\boxed{\text{только 11 класс}}$

5. $\dfrac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geq 2\log_2 x$