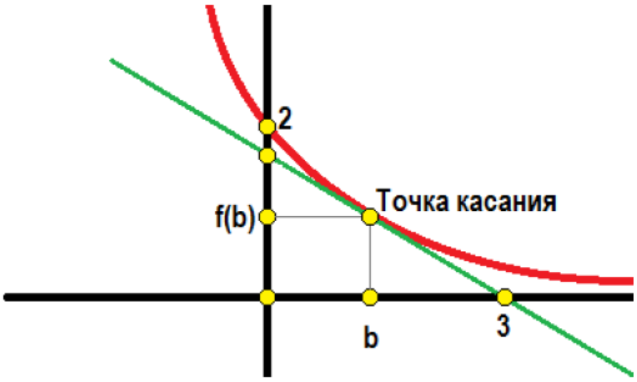
Как найти касательную к графику $\frac{2}{x+1}$ при x≥ 0, если известно, что данная касательная проходит через точку (0;3)?

На рисунке касательная обозначена зелёным цветом, график функции – красным.



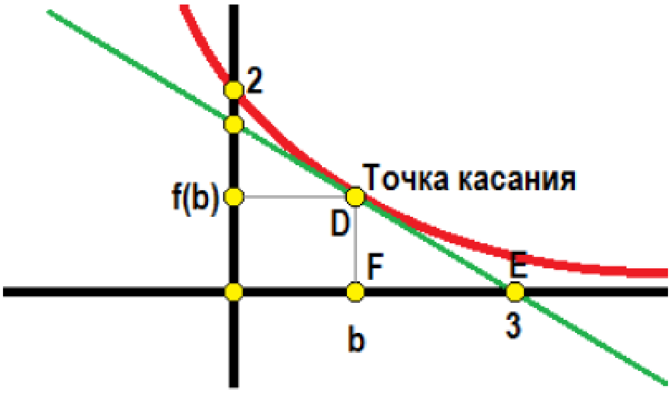
Алгоритм решения:

1. Найдём производную функции: $\frac{-2}{(x+1)^2}$

2. Уравнение касательной

Обозначим координату точки касания b. Уравнение касательной в этой точке будет выглядеть так: $y = f(b) + f'(b)(x - b)$.

Основная сложность в том, что мы не знаем координаты точки касания, т.е. b=?. Но мы знаем, что производная – это тангенс угла наклона касательной.



3. Рассмотрим задачу как геометрическую:

3.1. Нанесём точки

Точка D – точка касания, точка E – (3;0), точка F – (b;0) (или абсцисса точки касания).

3.2. Найдём тангенс угла наклона

Тангенс угла наклона – это тангенс угла FED с обратным знаком (по формуле приведения tg(180-α)=-tg α). По определению тангенса

$$tg\angle FED = -\frac{DF}{FE}$$

DF – это координата точки касания по оси Oy, т.е. $f(b)$

$FE = OE - OF = 3 - b$. За точку O принято начало координат.

Значит,

$$\begin{cases} tg\angle FED = -\dfrac{f(b)}{3-b} \\ f(b) = \dfrac{2}{b+1} \end{cases} \Leftrightarrow tg\angle FED = \frac{-2}{(b+1)(3-b)}$$

При этом нам известно, что тангенс угла наклона – это производная функции в данной точке. То есть $f'(b) = tg\angle FED$

4. Приравняем производную в точке b к найденному значению тангенса.

$$f'(b) = \frac{-2}{(b+1)^2}$$

$$\frac{-2}{(b+1)^2} = \frac{-2}{(b+1)(3-b)}$$

$$\frac{1}{(b+1)^2} = \frac{1}{(b+1)(3-b)}$$

$$\frac{1}{b+1} = \frac{1}{3-b}$$

$$b+1 = 3-b$$

$$2b = 2$$

$$b = 1$$

5. Получим координаты точки касания

b – это абсцисса точки касания. Подставив это выражение в исходную функцию $\frac{2}{x+1}$, получим $f(b) = 1$. Таким образом, координаты точки касания: D(1;1).

6. Подставим полученные координаты в уравнение касательной:

$$y = f(b) + f'(b)(x-b)$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x-1) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$